التمرين الأول

I] نعتبر الدالتين :

$$v(x)=x+\ln x \quad ; \quad u(x)=x-\ln x$$

1) أ- أحسب $u'(x)$ و أدرس رتابة الدالة u

ب- استنتج أن $x-\ln x>0$: $(\forall \in \mathbb{R}^{+*})$

2) أ- أحسب $v'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات v

ب- بين أن $v(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α و أن α ينتمي إلى المجال $\left]\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right[$

(نأخذ $\ln 3\simeq 1{,}1$; $\ln 2\simeq 0{,}7$)

ج- استنتج إشارة الدالة $v(x)$

II] لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$f(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{\ln x}{x}$$

1) أ- بين أن $D_f=]0,1[\cup]1,+\infty[$

ب- أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f

2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

3) أ- بين أن :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}):\ f'(x)=\frac{(x^2-\ln^2 x)(\ln x-1)}{(x\ln x)^2}$$

ب- بين أن $f(\alpha)=-2$ و ضع جدول تغيرات f

4) أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha\simeq 0{,}57$)

التمرين الثاني

ليكن n عددا طبيعيا بحيث $n\geq 3$.

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي :

$$f_n(x)=nx+2\ln(x)$$

1) أنجز جدول تغيرات الدالة f_n

2) بين أن $\sqrt{x}\geq \ln(x)$ $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})$

3) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a_n في $\mathbb{R}^{+*}$

4) أدرس رتابة المتتالية $(a_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

5) بين أن $\frac{1}{n}\leq a_n\leq\frac{1}{\sqrt{n}}$ و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

التمرين الثالث

1) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$U_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}$$

أ- بين أن :

$$(\forall x\in[1;+\infty[)\quad \frac{1}{x+1}\leq\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\leq\frac{1}{x}$$

ب- بين أن $U_n\geq\ln(n+1)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ثم

استنتج نهاية المتتالية $(U_n)_n$

2) نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{(\ln x)^2} & ; \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين $x_0=0$

التمرين الرابع

الجزء (1) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي :

$$g(x)=\frac{x}{x+1}+\ln(x+1)$$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) أحسب $g'(x)$ و ضع جدول التغيرات ثم استنتج إشارة الدالة $g(x)$ (لاحظ أن $g(0)=0$)

الجزء (2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x\ln(x+1)$

1) أ- أحسب النهايتين :

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

ب- ادرس الفرع اللانهائي ل (C_f) عند $+\infty$

2) بين أن $f'(x)=g(x)$ $(\forall x\in]-1,+\infty[)$

ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

3) ارسم المنحنى (C_f)

الجزء (3) ليكن n عددا طبيعيا بحيث $n\geq 2$

و ليكن h قصور الدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

نعتبر المعادلة $nh(x)=1$ (E_n)

1) أ- بين أن h تقابل من $[0,+\infty[$ نحو مجال يتم تحديده

ب- استنتج أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا α_n و أن $0<\alpha_n<1$

2) أ- قارن $h(\alpha_n)$; $h(\alpha_{n+1})$

و بين أن $(\alpha_n)_n$ متتالية تناقصية

ب- استنتج أن $(\alpha_n)_n$ متتالية متقاربة

3) أ- بين أن $\frac{x}{2}\leq\ln(x+1)\leq x$ $(\forall x\in[0,1])$

ب- استنتج أن $\frac{x^2}{2}\leq f(x)\leq x^2$ $(\forall x\in[0,1])$

4) بين أن $\sqrt{\frac{1}{n}}\leq\alpha_n\leq\sqrt{\frac{2}{n}}$ $(\forall n\geq 2)$

استنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$